DS de mathématiques n°10

Permutations, déterminants, intégration, dénombrement, probabilités – Corrigé

Noté sur 100 pts ± 5 pts pour le soin et la clarté, puis la note est ramené sur 20 en multipliant par 20/95.

Exercice 1 : déterminants (et algèbre linéaire)

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le déterminant de taille $2n$ suivant : $D_n =$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & & 0 & & 1 \\ & \ddots & & & \ddots \\ 0 & & 2 & 1 & \\ & & 1 & 2 & 0 \\ & \ddots & & & \ddots \\ 1 & & 0 & & 2 \end{vmatrix}_{(2n)}$$

/2,5 a) Calculer D_1 et D_2 .

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = \boxed{3}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_4 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \end{matrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_3 - 2L_2 \\ L_4 - 2L_1 \end{matrix} \\ &= (-3)^2 = \boxed{9} \end{aligned}$$

/6,5

b) En déduire D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
On cherchera une relation de récurrence.

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & & 0 & & -3 \\ & 2 & & & 1 \\ & & \ddots & & \ddots \\ 0 & & 2 & 1 & \\ & & 1 & 2 & 0 \\ & \ddots & & & \ddots \\ 1 & & 0 & & 2 \end{vmatrix}_{(2n)} \quad L_1 - 2L_n$$

On développe selon la première colonne : on trouve :

$$D_n = (-1)^{2n+1} \begin{vmatrix} & & 0 & & -3 \\ 2 & & & & 1 \\ & \ddots & & & \ddots \\ 0 & & 2 & 1 & \\ & & 1 & 2 & 0 \\ & \ddots & & & \ddots \\ 1 & & 0 & & 2 \end{vmatrix}_{(2n-1)}$$

On peut alors développer selon la première ligne :

$$\begin{aligned} D_n &= -1 \times (-1)^{2n-1+1} \times (-3) D_{n-1} \\ &= 3 D_{n-1} \end{aligned}$$

(On rappelle que D_{n-1} a pour taille $2n - 2$...). Ainsi, par récurrence immédiate, $D_n = 3^{n-1} D_1 = \boxed{3^n}$.

2) Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$, E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et

$f \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$f(e_1) = e_1 + ae_2 + bce_3, \quad f(e_2) = e_1 + be_2 + ace_3, \quad f(e_3) = e_1 + ce_2 + abe_3$$

/1,25

- a) Expliquer pourquoi ces trois relations suffisent à déterminer f de manière unique.

f est linéaire et comme $\mathcal{B}$ est une base, l'application f est entièrement déterminée par $f(\mathcal{B})$, i.e. par $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$.

/5

- b) Calculer le déterminant de f sous forme factorisée. Pour quelles valeurs de a, b et c est-ce que f est inversible ?

$$\begin{aligned} \det(f) &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ bc & c(b-a) & b(c-a) \end{vmatrix} \begin{array}{l} C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \end{array} \\ &= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ c(b-a) & b(c-a) \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & b \end{vmatrix} \\ &= \boxed{(b-a)(c-a)(b-c)} \end{aligned}$$

Ainsi, f est inversible si et seulement si $\det(f) \neq 0$ donc si et seulement si a, b et c sont distincts deux à deux.

- 3) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices inversibles telles que $\det A = \det B$.

/1,25

- a) Rappeler une relation entre $\text{com}(A)$ et A , où $\text{com}(A)$ désigne la comatrice de A .

On a

$$\boxed{A \text{com}(A)^{\top} = \det(A)I_n}$$

/3

- b) Montrer que $\text{com}(B)$ est inversible et donner $\text{com}(B)^{-1}$.

On a

$$B \text{com}(B)^{\top} = \det(B)I_n$$

En passant à la transposée, on en déduit que

$$\text{com}(B)B^{\top} = \det(B)I_n$$

Or, $\det(B) \neq 0$ donc

$$\text{com}(B) \times \frac{1}{\det(B)}B^{\top} = I_n$$

Ainsi, $\text{com}(B)$ est inversible et $\text{com}(B)^{-1} = \boxed{\frac{1}{\det(B)}B^{\top}}$

/6

- c) Dédire des questions a) et b) que si A est semblable à $\text{com}(B)$ alors B est semblable à $\text{com}(A)$.

Comme A est semblable à B , il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A = P \text{com}(B) P^{-1}$$

Ainsi,

$$A \text{com}(A)^{\top} = P \text{com}(B) P^{-1} \text{com}(A)^{\top}$$

Ainsi, par la question a), on a

$$\det(A)I_n = P \text{com}(B) P^{-1} \text{com}(A)^{\top}$$

D'où on en déduit, en multipliant à gauche par P^{-1} , puis $\text{com}(B)^{-1}$, puis P , que :

$$P \text{com}(B)^{-1} P^{-1} \det(A) = \text{com}(A)^{\top}$$

En utilisant la question b), on a donc

$$\text{com}(A)^{\top} = P \frac{1}{\det(B)} B^{\top} P^{-1} \det(A)$$

Comme $\det B = \det A$, on en déduit que

$$\text{com}(A)^{\top} = P B^{\top} P^{-1}$$

En passant à la transposée, on a donc

$$\text{com}(A) = (P^{-1})^{\top} B P^{\top}$$

Donc, en posant $Q = P^\top$ qui est une matrice inversible car P l'est, on en déduit, puisque $(P^{-1})^\top = (P^\top)^{-1}$

$$\text{com}(A) = Q^{-1}BQ$$

Ainsi, $\text{com}(A)$ est semblable à B .

Exercice-Problème 2 : Nombre de dérangements

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On appelle *dérangement* toute permutation qui n'a pas de point fixe. On note d_n le nombre de dérangements dans S_n :

$$d_n := \text{Card} \left\{ \sigma \in S_n \mid \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sigma(k) \neq k \right\}$$

On pose $d_0 = 1$ par convention. Dans tout ce problème, l'expression "avoir k points fixes" signifiera "avoir *exactement* k points fixes" (ni plus, ni moins). Tout schéma aidant la compréhension est bienvenu, mais ne saura être suffisant pour se substituer à une justification.

/3 1) Déterminer d_1 , d_2 et d_3 .

$S_1 = \{\text{id}\}$ et l'identité ne possède que des points fixes. Ainsi, $d_1 = \boxed{0}$.

$S_2 = \{\text{id}, (1\ 2)\}$. L'identité n'est pas un dérangement, mais $(1\ 2)$ l'est. Ainsi, $d_2 = \boxed{1}$.

Enfin, on a $S_3 = \{\text{id}, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$. On constate qu'il n'y a que les 3-cycles qui n'ont pas de points fixes. Ainsi, $d_3 = \boxed{2}$.

/1,5 2) a) On pose $\sigma = (2\ 4\ 1\ 3) \in S_4$. Décomposer σ^2 en produit de cycles à supports disjoints.

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 4)$$

On peut aussi affirmer que $\sigma^2 = (2\ 1)(4\ 3)$ sans plus de détails...

/5 b) Donner tous les éléments de S_4 et en déduire d_4 .

Dans S_4 , on trouve :

- L'identité
- Six transpositions : $(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4)$
- Huit 3-cycles : $(1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), (1\ 3\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)$
- Six 4-cycles : $(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2)$
- Trois double transpositions : $(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)$

On remarque que les seules permutations sans point fixe sont les 4-cycles et les double transpositions. On a donc $d_4 = 6 + 3 = \boxed{9}$.

/1 3) a) Rappeler la valeur du cardinal de S_n .

$$\text{card}(S_n) = \boxed{n!}$$

/6

b) Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, exprimer le nombre d'éléments de S_n ayant k points fixes en fonction d'un nombre de dérangements que l'on précisera.

On choisit d'abord les k points qui seront les points fixes : il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles. Appelons ces points fixes $a_1, \dots, a_k$. Les autres points $a_{k+1}, \dots, a_n$ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ne sont pas des points fixes, donc la permutation en question envoie $\{a_{k+1}, \dots, a_n\}$ sur lui-même et ce sans point fixe. C'est donc un dérangement d'un ensemble à $n - k$ éléments : il y a donc d_{n-k} choix possibles. Ainsi, il y a $\boxed{\binom{n}{k} d_{n-k}}$ permutations qui ont k points fixes.

Nota bene : Il serait par contre faux de dire qu'il y en a $\binom{n}{k} d_k$: avec $k = 1$, comme $d_1 = 0$, on trouverait qu'il y a 0 permutations de S_n ayant exactement 1 point fixe, ce qui est faux dès que $n \geq 3$.

/6 c) En déduire que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k = n!$

S_n possède $n!$ permutations. Or, pour une permutation de S_n , par la question précédente :

- Soit elle possède 0 point fixe, il y a alors $\binom{n}{0}d_{n-0}$ choix possibles.
- Soit elle possède 1 point fixe, il y a alors $\binom{n}{1}d_{n-1}$ choix possibles.
- etc.
- Soit elle possède n points fixes, il y a alors $\binom{n}{n}d_{n-n}$ choix possible.

Ainsi, $\text{card}(S_n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}d_{n-k}$, ou encore :

$$n! = \sum_{i=0}^n \binom{n}{n-i}d_i \quad \text{avec } i = n - k$$

$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}d_i \quad \text{car } \binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$$

d) Que vaut d_5 ?

Par la formule de la question précédente,

$$5! = 120 = \sum_{i=0}^5 \binom{5}{i}d_i = d_0 + 5d_1 + 10d_2 + 10d_3 + 5d_4 + d_5$$

D'où, par les questions 1) à 2),

$$\begin{aligned} d_5 &= 5! - d_0 - 5d_1 - 10d_2 - 10d_3 - 5d_4 \\ &= 120 - 1 - 0 - 10 \times 1 - 10 \times 2 - 5 \times 9 \\ &= 120 - 1 - 10 - 20 - 45 \\ &= 120 - 76 \\ &= \boxed{44} \end{aligned}$$

4) En arrivant à une fête, 5 personnes déposent leur manteau, en vrac, dans une petite pièce. En fin de soirée, chacune de ces 5 personnes repart en prenant, au

hasard, un des 5 manteaux (l'abus d'alcool n'aidant pas à distinguer les différents manteaux).

a) Donner un univers Ω et une probabilité $\mathbb{P}$ associés à cette "expérience" aléatoire.

On peut numéroter les personnes de 1 à 5 et les manteaux de 1 à 5. L'expérience consiste à affecter à chaque personne un et un seul manteau. Un résultat de cette expérience peut donc se représenter par une application injective de $\llbracket 1, 5 \rrbracket$ dans lui-même, c'est-à-dire par une permutation de $\llbracket 1, 5 \rrbracket$. On peut donc poser $\Omega = \boxed{S_5}$.

Comme chaque résultat est équiprobable (aucune personne n'a plus de chance de prendre un manteau qu'un autre), la probabilité $\mathbb{P}$ associée est uniforme.

b) Quelle est la probabilité qu'aucun des invités ne reparte avec son manteau ?

Posons A l'évènement "aucun invité ne repart avec son manteau". Une permutation $\sigma \in \Omega$ vérifiera cette condition si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$, on a $\sigma(i) \neq i$, i.e. σ est un dérangement. Le cardinal de A est égal à d_5 . On en déduit que :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{d_5}{120} = \frac{44}{120} = \boxed{\frac{11}{30}}$$

On admet dans la suite du problème la formule suivante : $d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

5) Déterminer la limite de l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^t dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Montrons que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $t^n \leq 1$, donc

$$|I_n - 0| = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^t dt \leq \int_0^1 \frac{1}{n!} e^t dt = \frac{1}{n!} (e - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{0}$

6) En apportant les justifications nécessaires, appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction exponentielle, à l'ordre n en 0.

La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc en particulier de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Par ailleurs, on a $\exp^{(n+1)}(t) = e^t$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\exp^{(k)}(0) = e^0 = 1$. Ainsi, par la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

7) Déduire des deux questions précédentes la limite notée ℓ de $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

En appliquant la formule de Taylor en $x = -1$, on a

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (-1)^k + \int_0^{-1} \frac{(-1-t)^n}{n!} e^t dt$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_0^{-1} \frac{(-1-t)^n}{n!} e^t dt &= -(-1)^n \int_{-1}^0 \frac{(t+1)^n}{n!} e^t dt \\ &= -(-1)^n \int_0^1 \frac{u^n}{n!} e^{u-1} du \quad \text{avec } \begin{cases} u = t+1 \\ du = dt \end{cases} \\ &= -(-1)^n e^{-1} \times I_n \end{aligned}$$

et comme $I_n \rightarrow 0$, on en déduit que $\int_0^{-1} \frac{(-1-t)^n}{n!} e^t dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (-1)^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{e^{-1}}$$

8) Soit p_n la probabilité qu'une permutation de S_n prise au hasard soit un dérangement. Quelle est la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$?

On a admis que $d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. La probabilité qu'une permutation de S_n

prise au hasard soit un dérangement est donc

$$p_n = \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Par ce qui précède, on a donc $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{e^{-1}}$

Exercice 3 : Étude d'une fonction définie par une intégrale

1) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction $t \mapsto t^x$ se prolonge par continuité en 0. Dans la suite, on ne fera aucune différence entre $t \mapsto t^x$ et son prolongement par continuité en 0.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On a $t^x = e^{x \ln t}$.

- Si $x > 0$, on a $x \ln t \xrightarrow{t \rightarrow 0} -\infty$ et donc $t^x \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ par composition.
- Si $x = 0$, on a $x \ln t = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ et donc $t^x \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$ par composition.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $\varphi(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x} dt$. Calculer $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$.

On a

$$\varphi(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^0} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+1} dt = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^1} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \boxed{\ln 2}$$

$$\varphi(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

3) Montrer que φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x \leq y$. Montrons que $\varphi(x) \leq \varphi(y)$. Pour tout $t \in]0, 1[$, on a $\ln t \leq 0$ donc $x \ln t \geq y \ln t$. Ainsi, par croissance de l'exponentielle, on a $t^x \geq t^y$. On remarque que cette inégalité reste valide en $t = 0$. Ainsi, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $1+t^x \geq 1+t^y > 0$. D'où (par décroissance de $u \mapsto 1/u$) :

$$\frac{1}{1+t^x} \leq \frac{1}{1+t^y}$$

ce qui après intégration entre 0 et 1 conduit à $\varphi(x) \leq \varphi(y)$. Donc φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

- 4) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction $F : t \in [0, 1] \mapsto \frac{1}{x+1}t^{x+1}$ est une primitive de $t \mapsto t^x$ sur $]0, 1]$. Montrer que F est dérivable en 0 et donner $F'(0)$.

Pour tout $t \in]0, 1]$, on a

$$F(t) = \frac{1}{x+1} e^{(x+1)\ln t}$$

donc F est dérivable sur $]0, 1]$ par composée et produit de telles fonctions et

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{1}{x+1} \times \frac{x+1}{t} e^{(x+1)\ln t} \\ &= \frac{1}{t} t^{x+1} \\ &= t^x \end{aligned}$$

Par la question 1), on remarque que $F'(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Comme F est par ailleurs continue en 0, on en déduit par le théorème de la limite de la dérivée que F est dérivable en 0 et que

$$F'(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} = \lim_{t \rightarrow 0} t^x$$

- 5) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x \leq y$, on a $\varphi(y) - \varphi(x) \leq y - x$.

F est en particulier une primitive de $t \mapsto t^x$ sur $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} \varphi(y) - \varphi(x) &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^y} - \frac{1}{1+t^x} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{t^x - t^y}{(1+t^x)(1+t^y)} \right) dt \end{aligned}$$

Or, comme pour tout $t \in [0, 1]$ on a $t^x - t^y \geq 0$ et $(1+t^x)(1+t^y) \geq 1$, on en

déduit que $\frac{t^x - t^y}{(1+t^x)(1+t^y)} \leq t^x - t^y$, donc

$$\begin{aligned} \varphi(y) - \varphi(x) &\leq \int_0^1 (t^x - t^y) dt \\ &= \left[\frac{t^{x+1}}{x+1} - \frac{t^{y+1}}{y+1} \right]_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} \\ &= \frac{y-x}{(x+1)(y+1)} \\ &\leq y-x \end{aligned}$$

car $y-x \geq 0$ et $(x+1)(y+1) \geq 1$.

- 6) En déduire que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Par la question précédente, on a pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x \leq y$, on a :

$$\varphi(y) - \varphi(x) \leq y - x$$

Or, par la question 3), on sait que φ est croissante, ainsi on en déduit que

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| = \varphi(y) - \varphi(x) \leq y - x = |y - x|$$

Ainsi, φ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. C'est donc une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

- 7) En majorant $|1 - \varphi(x)|$ pour tout $x \geq 0$, déterminer la limite de φ en $+\infty$.

On a

$$|1 - \varphi(x)| = \left| \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x} dt \right| = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x} dt \leq \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \boxed{0}$.

- 8) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $\varphi(x) = \frac{1}{2} + x \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt$.

(On réalise une IPP :)

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{1+t^x} dt \\ &= \left[\frac{t}{1+t^x} \right]_0^1 - \int_0^1 t \frac{-xt^{x-1}}{(1+t^x)^2} dt \\ &= \frac{1}{2} + x \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt\end{aligned}$$

Toutefois, le calcul ci-dessus n'est pas tout à fait correct a priori car t^{x-1} n'est pas défini pour $t = 0$ et $x - 1 < 0$. Ce calcul n'est donc valide que pour $x \geq 1$... Il y avait 1,5 points pour l'avoir remarqué, et un bonus de 6 points pour essayer de résoudre ce problème. On pouvait le faire de la manière suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 1 \cdot \frac{1}{1+t^x} dt \quad J_n = \frac{1}{2} + x \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt$$

En refaisant ce qui précède, on a $I_n = J_n$ sans problème car on n'intègre pas en 0. Ensuite, on montre que, lorsque n tend vers $+\infty$, I_n tend vers $\int_0^1 \frac{1}{1+t^x} dt$ et J_n tend vers $\frac{1}{2} + x \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt$. Par exemple :

$$\begin{aligned}\left| J_n - \left(\frac{1}{2} + x \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt \right) \right| &= \left| x \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt \right| \\ &= x \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt \\ &\leq x \int_0^{\frac{1}{n}} t^x dt \\ &= x \left[\frac{1}{x+1} t^{x+1} \right]_0^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{x}{x+1} \times \frac{1}{n^{x+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\end{aligned}$$

/8 9) En déduire que φ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 1/4$.

Soit $x > 0$. Par la question précédente,

$$\begin{aligned}\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} - \frac{1}{4} \right| &= \left| \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} + x \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt - \frac{1}{4} \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{4t^x - (1+t^x)^2}{4(1+t^x)^2} dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{-1 + 2t^x - (t^x)^2}{4(1+t^x)^2} dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{-(t^x - 1)^2}{4(1+t^x)^2} dt \right| \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{t^x - 1}{t^x + 1} \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{t^{2x} - 2t^x + 1}{t^{2x} + 2t^x + 1} dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \left(1 - 4 \frac{t^x}{t^{2x} + 2t^x + 1} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} - \int_0^1 \frac{t^x + 1 - 1}{(t^x + 1)^2} dt \\ &= \frac{1}{4} - \int_0^1 \frac{1}{t^x + 1} dt + \int_0^1 \frac{1}{(t^x + 1)^2} dt\end{aligned}$$

Or, comme φ est continue, on a $\varphi(x) = \int_0^1 \frac{1}{t^x + 1} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \varphi(0) = \frac{1}{2}$ et donc il

suffit de montrer que $\int_0^1 \frac{1}{(t^x + 1)^2} dt$ tend vers $\frac{1}{4}$ lorsque x tend vers 0. Or :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^1 \frac{1}{(t^x + 1)^2} dt - \frac{1}{4} \right| &= \left| \int_0^1 \frac{4 - (t^x + 1)^2}{4(t^x + 1)^2} dt \right| \\
 &= \left| \int_0^1 \frac{4 - t^{2x} - 2t^x - 1}{4(t^x + 1)^2} dt \right| \\
 &= \left| \int_0^1 \frac{t^{2x} + 2t^x - 3}{4(t^x + 1)^2} dt \right| \\
 &\leq \left| \int_0^1 (t^{2x} + 2t^x - 3) dt \right| \quad \text{car } t^x + 1 \geq 1 \\
 &= \left| \int_0^1 (t^x - 1)(t^x + 3) dt \right| \\
 &\leq 4 \left| \int_0^1 (t^x - 1) dt \right| \quad \text{car } t^x + 3 \leq 4 \\
 &= 4 \left| \frac{1}{x+1} - 1 \right| \\
 &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0
 \end{aligned}$$

On a donc bien $\int_0^1 \frac{1}{(t^x + 1)^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{4}$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4} - \int_0^1 \frac{1}{t^x + 1} dt + \int_0^1 \frac{1}{(t^x + 1)^2} dt \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0$$

Finalement, on a bien montré que $\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} - \frac{1}{4} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, d'où le résultat.